2019.6.29　最適化とその応用 –未来を担う若手研究者の集い 2019- ＠筑波大学

クラスター巡回セールスマン問題に対する近似率の改善

河崎 政宗

東京工業大学 環境・社会理工学院 融合理工学系 修士1年

高澤 兼二郎

法政大学 理工学部 経営システム工学科

【目次】

1.はじめに

・[定義] TSP・CTSP
・先行研究について
・本研究の目的

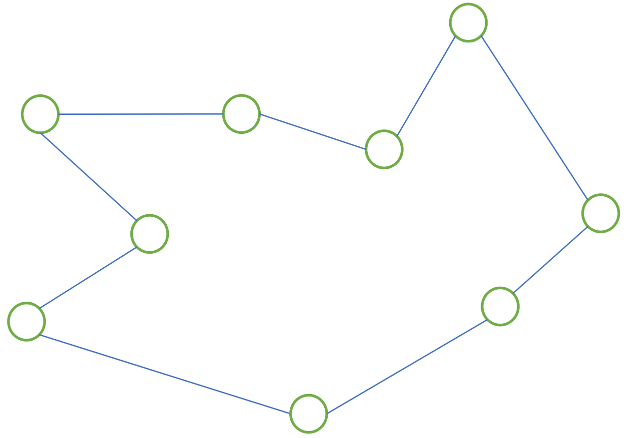
1.【はじめに】［定義］TSP・CTSP

◆完全無向グラフ $G = (V, E)$
◆三角不等式を満たす枝長関数 $w: E \to \mathbb{R}_+$

● TSP(The Traveling Salesman Problem)

定義

ハミルトン閉路の中で最短のものを求める問題．［NP困難］

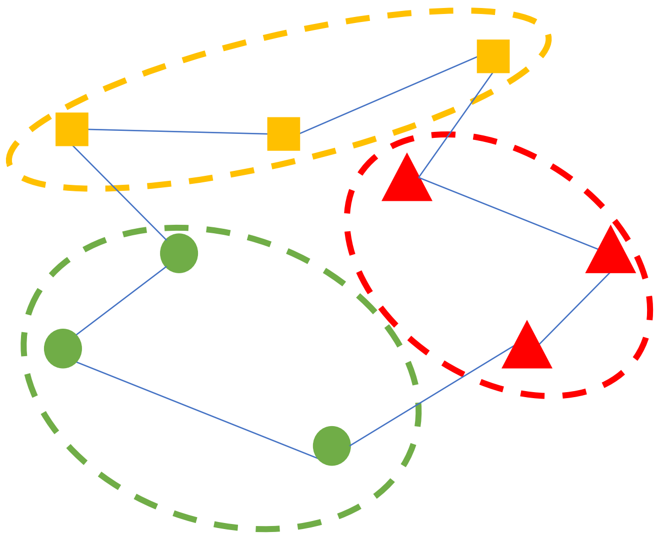


一般化

●CTSP(The Clustered Traveling Salesman Problem)

定義

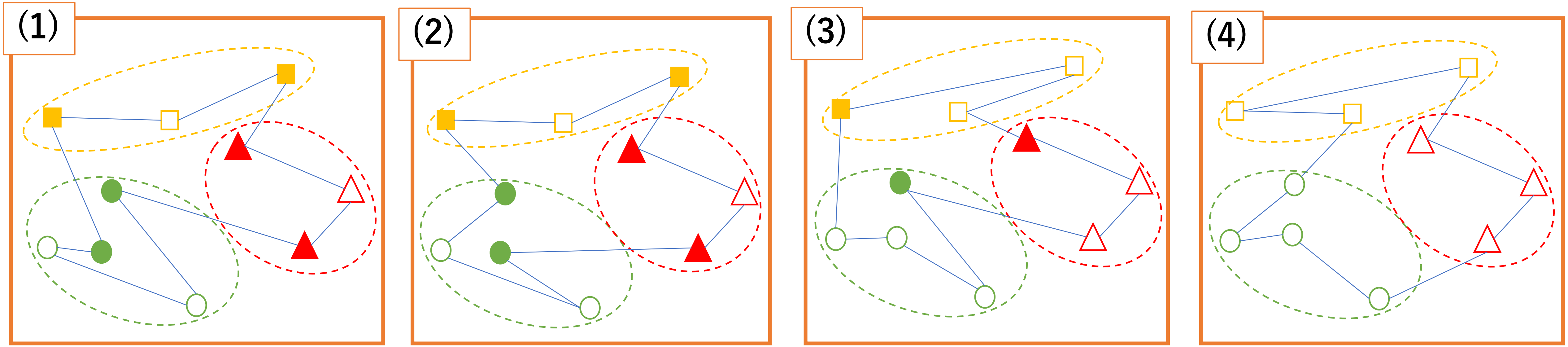
クラスタに分割されている頂点集合に対し，
クラスタ内の頂点を連続して通過する
最短のハミルトン閉路を求める問題．［NP困難］



1.【はじめに】先行研究について

◆ Guttmann-Beck et al.('00)の近似アルゴリズム概要

【CTSP】各クラスタにおける頂点の与え方で問題分類	部分問題	近似率
(1)始点と終点が与えられる.	TSPP・SCP	1.9091
(2)二つの頂点が与えられる．どちらかを始点，終点に選択.	TSPP・RPP	1.8
(3)始点のみが与えられる．終点は自由に選択可能.	TSPP・SCP	2.643
(4)何も与えられない．始点と終点を自由に選択可能.	TSPP・RPP	2.75



1.【はじめに】本研究の目的

Guttmann-Beck et al.の近似アルゴリズムに
部分問題TSPPへの新しい近似アルゴリズム[Zenklusen ’19]を
適用することでCTSPの各分類における近似率を改善する.

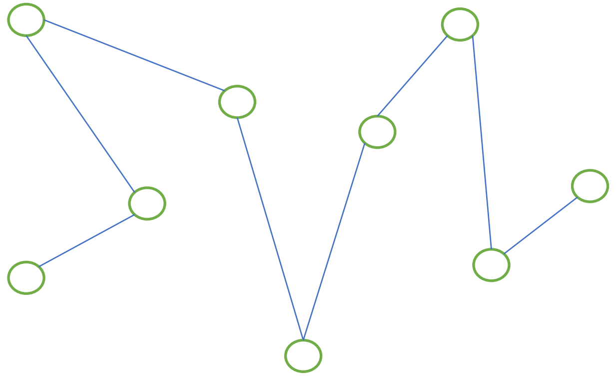
【CTSP】 各クラスタにおける頂点の与え方で問題分類	部分問題	近似率 [Guttmann-Beck et al.]	近似率 [本研究]
(1)始点と終点が与えられる.	TSPP・SCP	1.9091	1.875
(2)二つの頂点が与えられる. どちらかを始点，終点に選択.	TSPP・RPP	1.8	1.714
(3)始点のみが与えられる. 終点は自由に選択可能.	TSPP・SCP	2.643	2.643
(4)何も与えられない. 始点と終点を自由に選択可能.	TSPP・RPP	2.75	2.67

2.準備

・[定義] TSPP
・[近似アルゴリズム] TSPP
・[定義] SCP・RPP
・[近似アルゴリズム] SCP・RPP

2.【準備】［定義］TSPP

◆完全無向グラフ $G = (V, E)$
◆三角不等式を満たす枝長関数 $w: E \to \mathbb{R}_+$



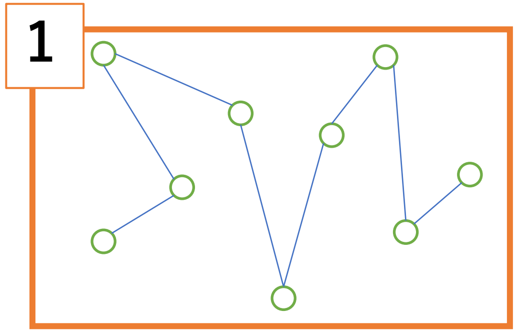
● **TSPP(The Traveling Salesman Path Problem)**

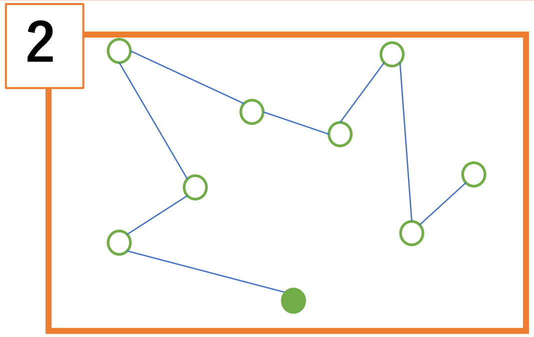
定義

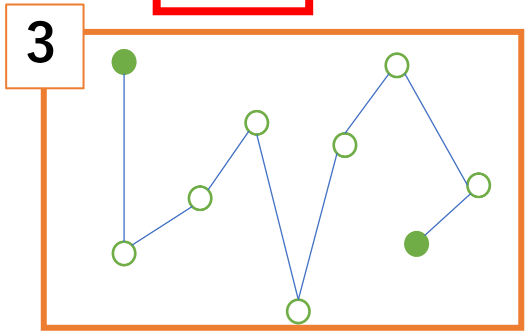
最短のハミルトンパスを見つける問題.

● **Hoogeveen('91)によるTSPPの問題分類・近似率**

【TSPP】各グラフにおける端点の与え方で問題分類	近似率
1 パスの両端点が与えられない.	1.5
2 パスの端点のうち，一点のみが与えられる.	1.5
3 パスの両端点が与えられる.	$\boxed{1.67}$







2.【準備】先行研究(Guttman-Beck et al.)と本研究の違い

◆ Zenklusen ('19)によるTSPPの近似アルゴリズム

各グラフにおける端点の与え方で問題分類【TSPP】	近似率(Hoogeveen)	近似率(Zenklusen)
1 パスの両端点が与えられない.	1.5	1.5
2 パスの端点のうち，一点のみが与えられる.	1.5	1.5
3 パスの両端点が与えられる.	1.67	1.5

Guttmann-Beck et al.

本研究

2.【準備】［近似アルゴリズム］TSPP

●TSPP(The Traveling Salesman Path Problem)

定理 [Guttmann-Beck et al. ’00]

パスの両端が指定されているTSPPを考える．始点と終点の枝長がLのとき，
近似値$w(P) \leq \min\left\{\frac{3}{2}\mathrm{OPT} + \frac{L}{2},\ 2\mathrm{OPT} - L\right\}$

Zenklusen ’19

定理 [本研究]

パスの両端が指定されているTSPPを考える．始点と終点の枝長がLのとき，
近似値$w(P) \leq \min\left\{\frac{3}{2}\mathrm{OPT},\ 2\mathrm{OPT} - L\right\}$ [Algorithm TSPP]

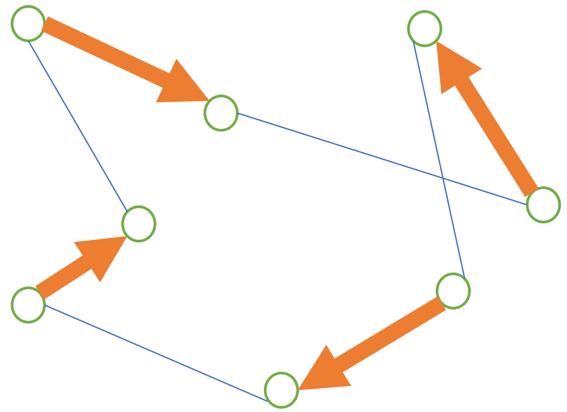
2.【準備】［定義］SCP・RPP

◆完全無向グラフ $G = (V, E)$
◆三角不等式を満たす枝長関数 $w: E \to \mathbb{R}_+$

●SCP(The Stacker Crane Problem)

定義

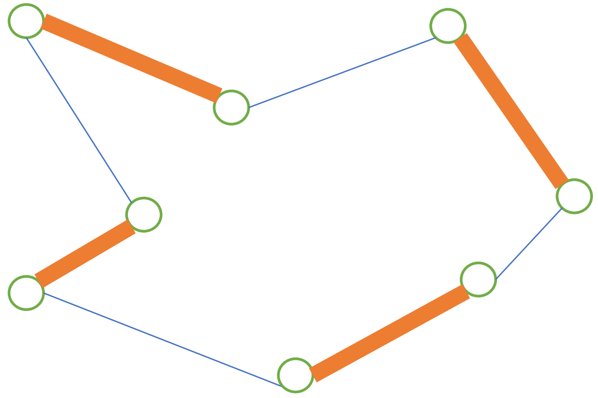
有向枝Dを加えた混合グラフ $G = (V, E, D)$において,
Dの枝すべてを通る最短のハミルトン閉路を求める問題.
すべての頂点はちょうど一つの有向枝の始点か終点に属す.



●RPP(The Rural Postman Problem)

定義

$E' \subseteq E$ を特殊無向枝とするとき,
E'の枝すべてを通る最短のハミルトン閉路を求める問題.



2.【準備】［近似アルゴリズム］SCP・RPP

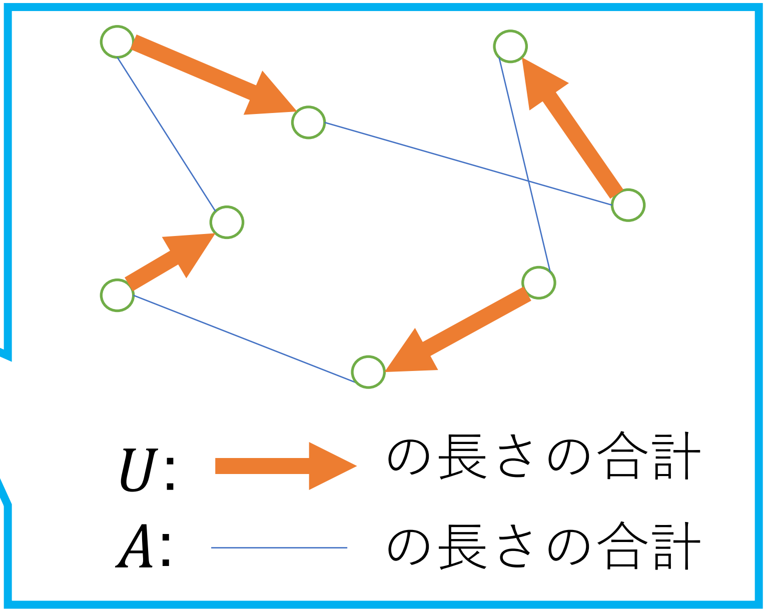
●SCP(The Stacker Crane Problem)

定理 [Frederickson et al. ’78]

・U : 有向枝Dの長さの合計

・$\mathrm{OPT} = U + A$

近似値$w(T_s) \leq \min\left\{\frac{3}{2}A + 2U,\ 3A + U\right\}$ [Algorithm SCP]



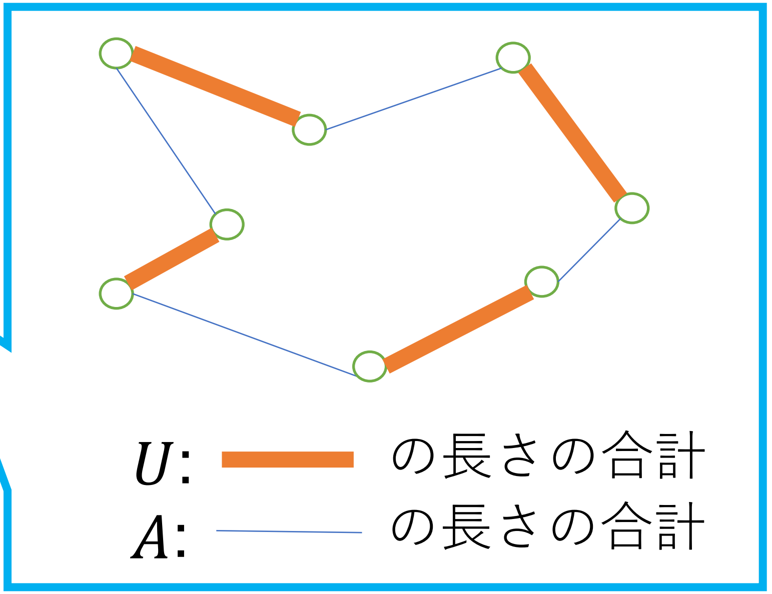
●RPP(The Rural Postman Problem)

定理 [Frederickson ’79]

・U : 特殊無向枝E'の長さの合計

・$\mathrm{OPT} = U + A$

近似値$w(T_r) \leq \min\left\{\frac{3}{2}(A + U),\ 3A + U\right\}$ [Algorithm RPP]

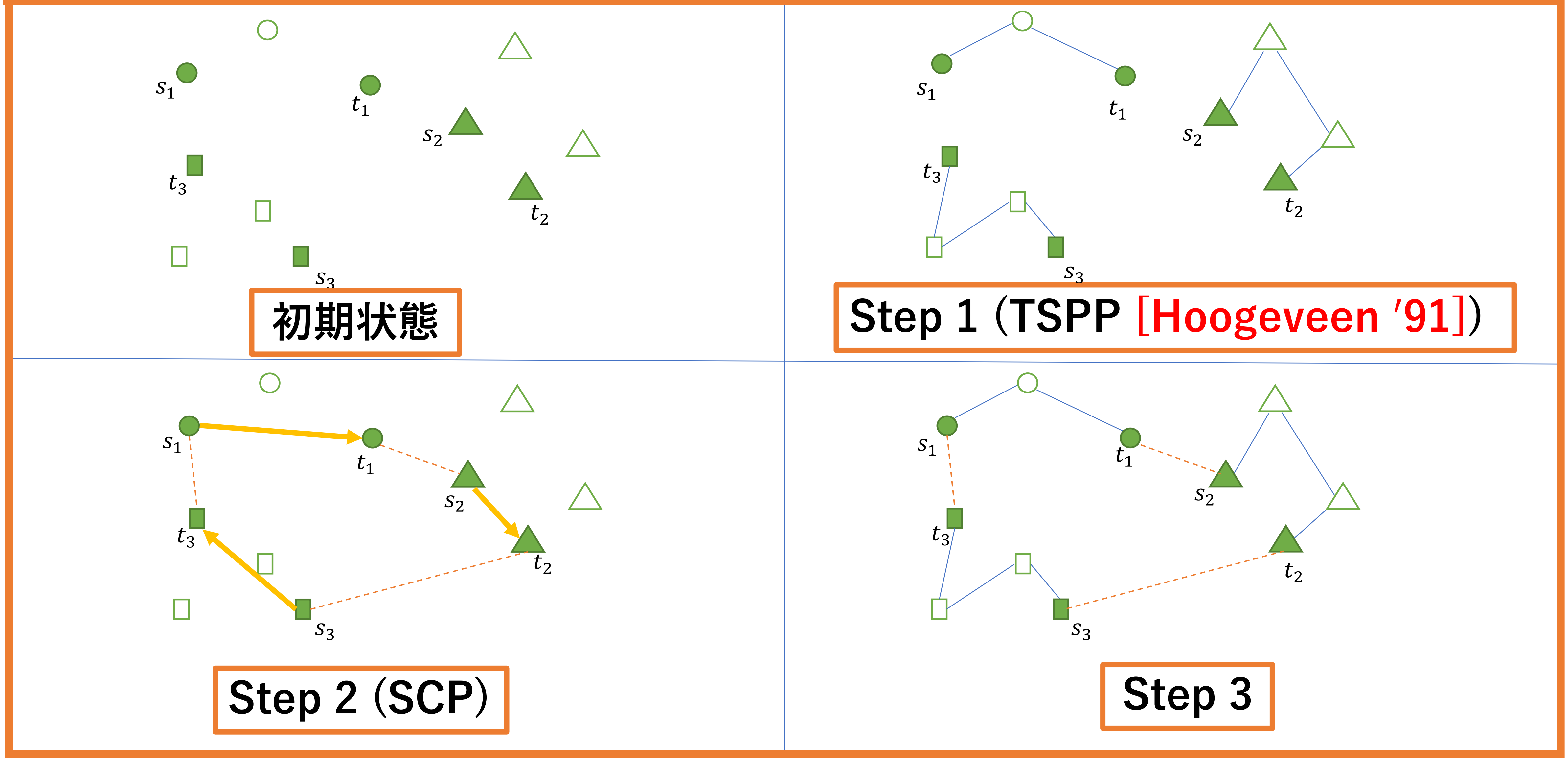


3.研究結果

- [近似アルゴリズム] CTSP (1)
- [近似アルゴリズム] CTSP (2)
- [近似アルゴリズム] CTSP (4)

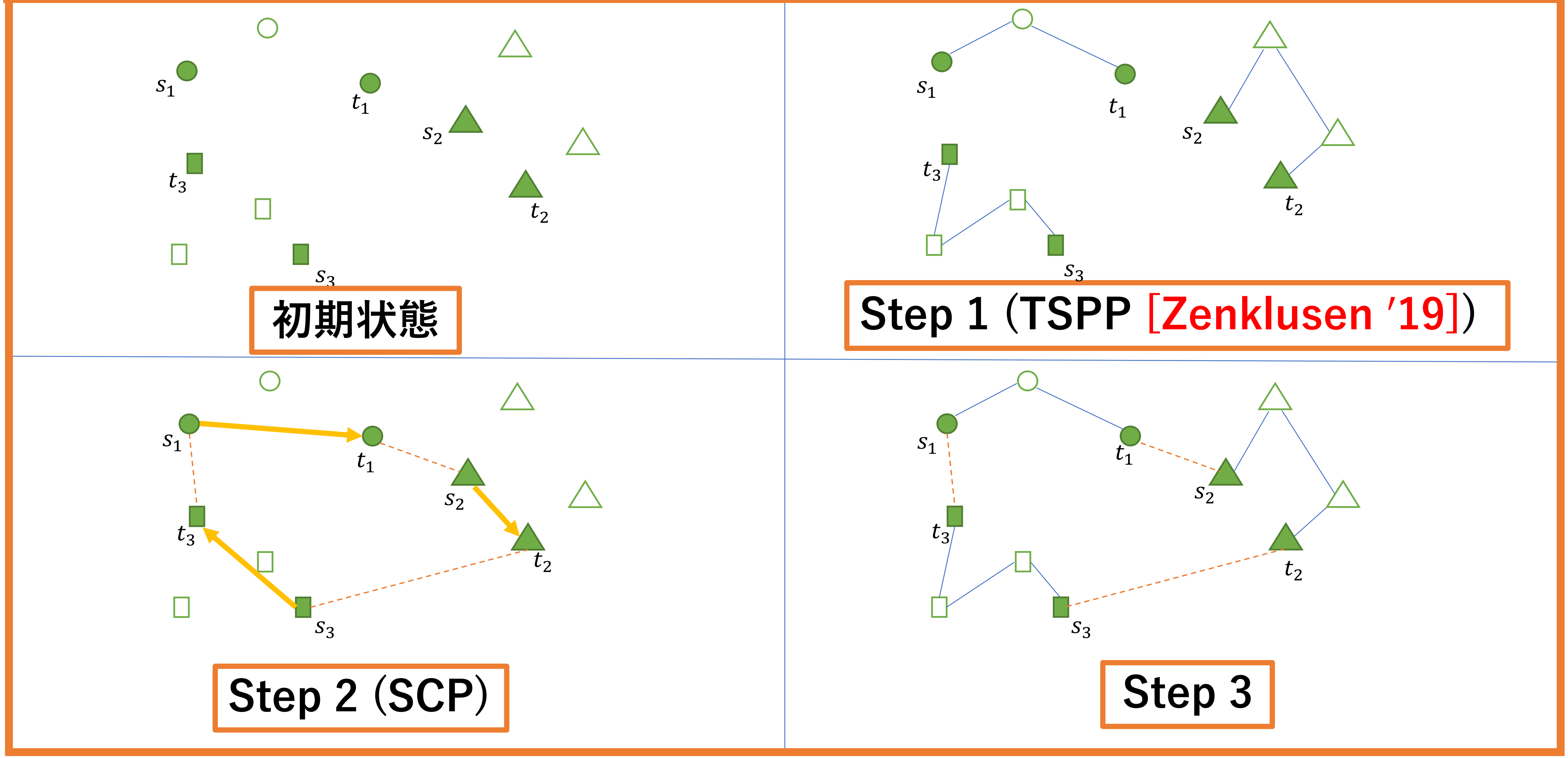
3.【研究結果】分類(1)における近似アルゴリズム

Algorithm 1 [Guttmann-Beck et al. '00]



3.【研究結果】分類(1)における近似アルゴリズム

Algorithm A [本研究]



3.【研究結果】分類(1)における近似率の改善

定理 [本研究]

Algorithm Aで得たツアー T_M の長さは以下を満たす.

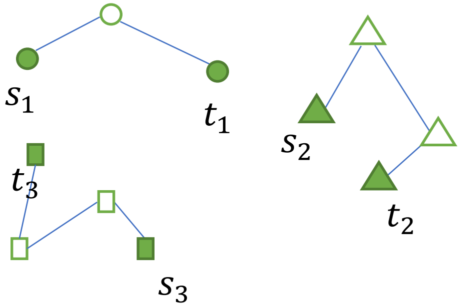
$$w(T_M) \le \frac{15}{8}\mathrm{OPT} = 1.875\ \mathrm{OPT}$$

近似率(Guttmann-Beck et al.):
1.9091

W：クラスタ内パスの合計長さ(OPT)

$A = \mathrm{OPT} - W$, $U = \sum_{i=1}^{k} w(s_i, t_i)$.

Step 1 (Algorithm TSPP)

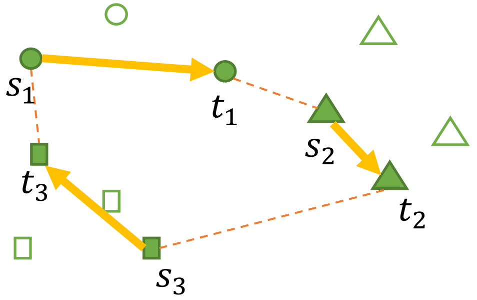


$$w(P) \le \min\left\{2W - U,\ \frac{3}{2}W\right\}$$

$$\le \boxed{\frac{3}{4}}(2W - U) + \boxed{\frac{1}{4}} \cdot \frac{3}{2}W$$

$$= \frac{15}{8}W - \frac{3}{4}U$$

Step 2 (Algorithm SCP)

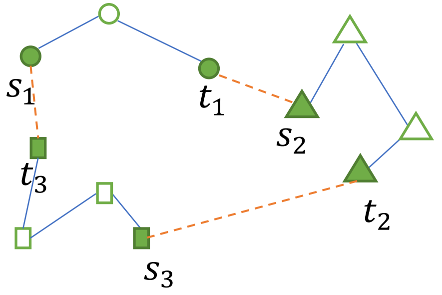


$$w(T_s) \le \min\left\{\frac{3}{2}A + 2U,\ 3A + U\right\}$$

$$\le \boxed{\frac{3}{4}}\left(\frac{3}{2}A + 2U\right) + \boxed{\frac{1}{4}}(3A + U)$$

$$= \frac{15}{8}A + \frac{7}{4}U$$

Step 3

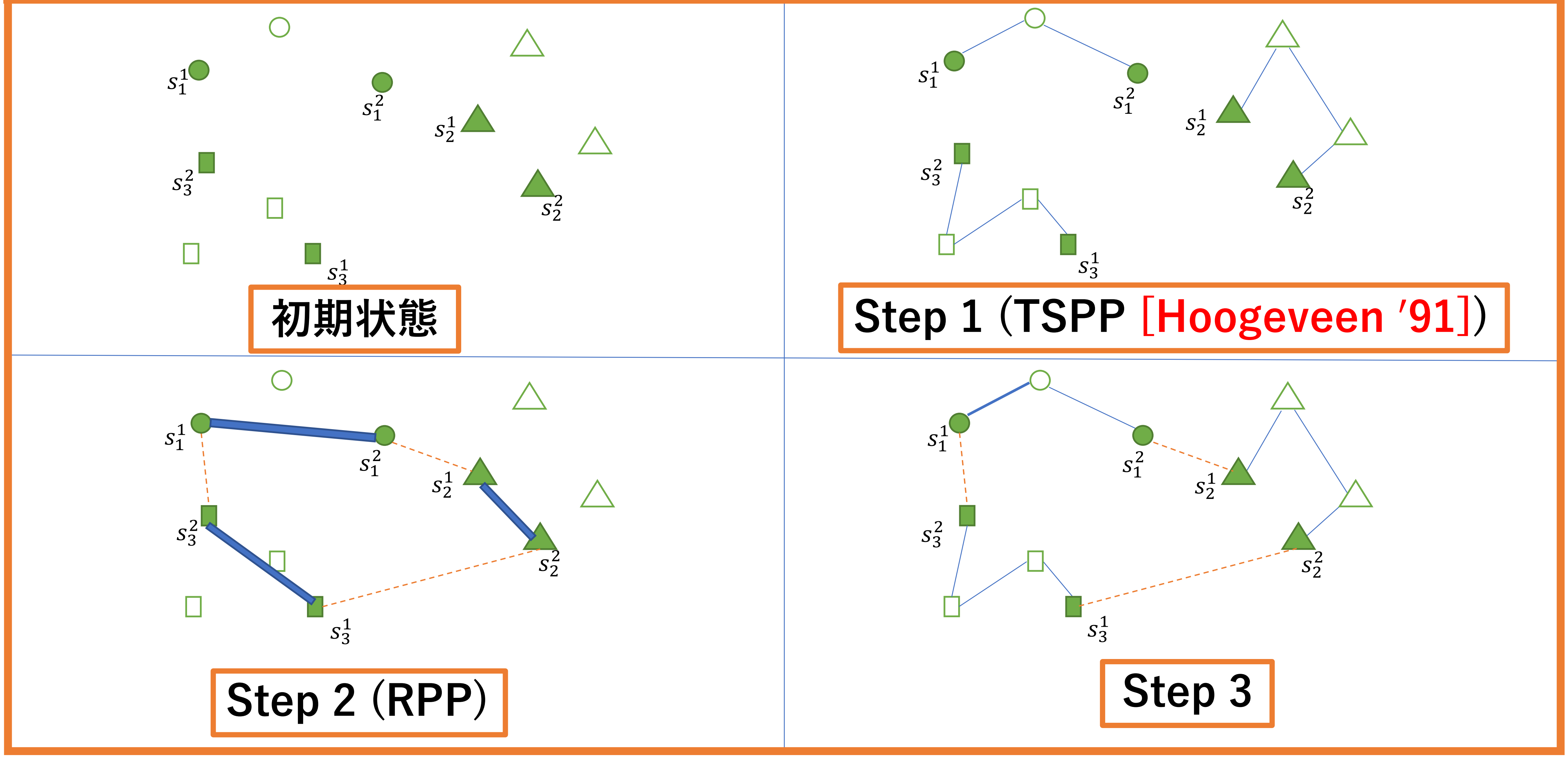


$$w(T_M) \le w(P) - U + w(T_s)$$

$$= \frac{15}{8}\boxed{(W + A)} = \boxed{\frac{15}{8}\mathrm{OPT}}$$

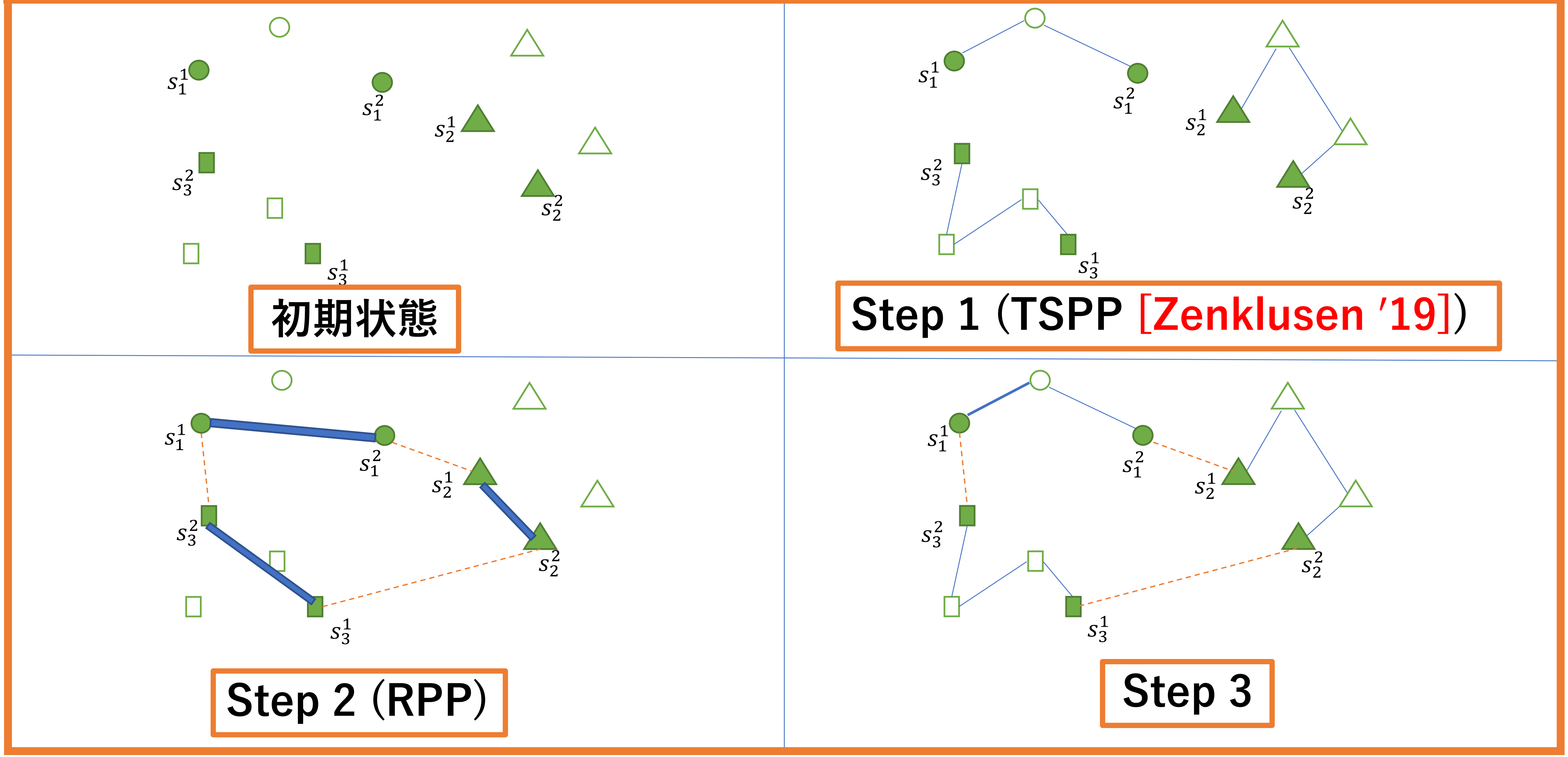
3.【研究結果】分類(2)における近似アルゴリズム

Algorithm 2 [Guttmann-Beck et al. ’00]



3.【研究結果】分類(2)における近似アルゴリズム

Algorithm B [本研究]



3.【研究結果】分類(2)における近似率の改善

定理 [本研究]

Algorithm Bで得たツアー T_M の長さは以下を満たす.

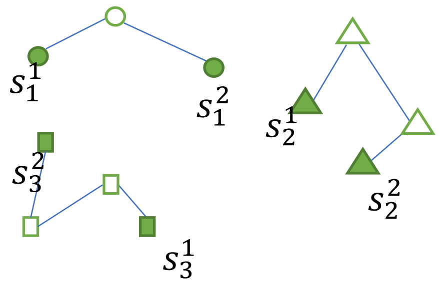
$$w(T_M) \le \frac{12}{7}\mathrm{OPT} \approx 1.714\,\mathrm{OPT}$$

近似率(Guttmann-Beck et al.):
1.8

W : クラスタ内パスの合計長さ(OPT)

$A = \mathrm{OPT} - W$, $U = \sum_{i=1}^{k} w(s_i^1, s_i^2)$.

Step 1 (Algorithm TSPP)

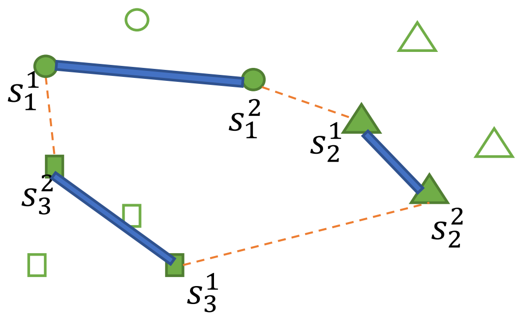


$$w(P) \le \min\left\{2W - U,\ \frac{3}{2}W\right\}$$

$$\le \boxed{\frac{3}{7}}(2W - U) + \boxed{\frac{4}{7}} \cdot \frac{3}{2}W$$

$$= \frac{12}{7}W - \frac{3}{7}U$$

Step 2 (Algorithm RPP)

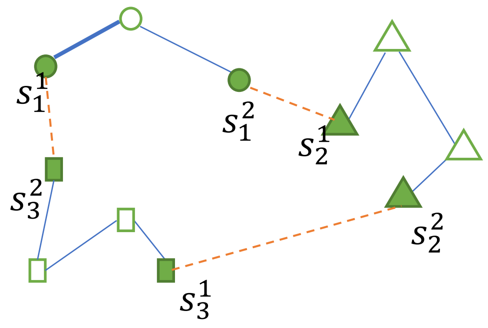


$$w(T_r) \le \min\left\{\frac{3}{2}(A + U),\ 3A + U\right\}$$

$$\le \boxed{\frac{6}{7}}\left(\frac{3}{2}(A + U)\right) + \boxed{\frac{1}{7}}(3A + U)$$

$$= \frac{12}{7}A + \frac{10}{7}U$$

Step 3



$$w(T_M) \le w(P) - U + w(T_r)$$

$$= \frac{12}{7}\boxed{(W + A)} = \boxed{\frac{12}{7}\mathrm{OPT}}$$

3.【研究結果】分類(4)における近似アルゴリズムの概要

Algorithm 4 [Guttmann-Beck et al. ’00]

Step 1 (→次スライド)

(a) 各クラスタにおいてAlgorithm TSPPを適用，その端点をa_i, b_iとする.
(b) $a_i b_i$を特殊枝とするグラフへ Algorithm RPPを適用.
(c) (b)の特殊枝を(a)のパスへ置換．このツアーをT_hとする.

Step 2

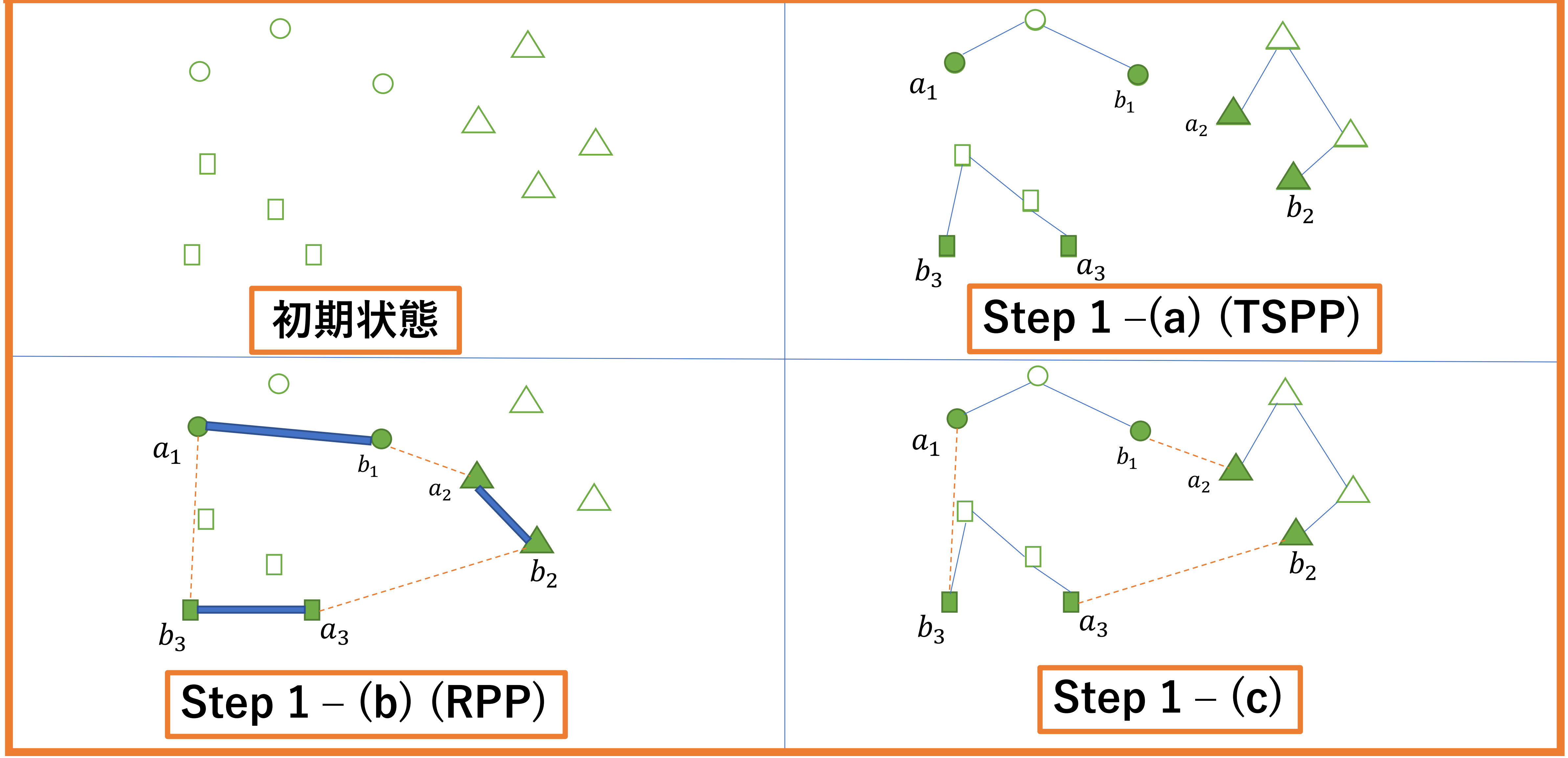
(a) 各クラスタにおいて距離が最大となる2点を選択.
(b) Algorithm 2(分類(2)) を適用．このツアー T_lとする.

Step 3

T_h, T_lの短い方を選択.

3.【研究結果】分類(4)における近似アルゴリズム Step 1

Algorithm 4 – Step 1 [Guttmann-Beck et al. '00]



3.【研究結果】分類(4)における近似アルゴリズムの概要

Algorithm 4 [Guttmann-Beck et al. ’00]

Step 1

(a) 各クラスタにおいてAlgorithm TSPPを適用，その端点をa_i, b_i とする.
(b) $a_i b_i$を特殊枝とするグラフへ Algorithm RPPを適用.
(c) (b)の特殊枝を(a)のパスへ置換.このツアーをT_hとする.

Step 2

(a) 各クラスタにおいて距離が最大となる2点を選択.
(b) Algorithm 2(分類(2)) を適用．このツアー T_lとする.

Step 3

T_h, T_lの短い方を選択.

3.【研究結果】分類(4)における近似アルゴリズムの概要

Algorithm D [本研究]

Step 1 [Guttmann-Beck et al. ’00]

(a) 各クラスタにおいてAlgorithm TSPPを適用，その端点をa_i, b_i とする.
(b) $a_i b_i$を特殊枝とするグラフへ Algorithm RPPを適用.
(c) (b)の特殊枝を(a)のパスへ置換.このツアーをT_hとする.

Step 2

(a) 各クラスタにおいて距離が最大となる2点を選択.
(b) Algorithm B を適用．このツアー T_lとする.

Step 3

T_h, T_lの短い方を選択.

3.【研究結果】分類(4)における近似率の改善

定理 [本研究]

Algorithm Dで得たツアー　T_M　の長さは以下を満たす.

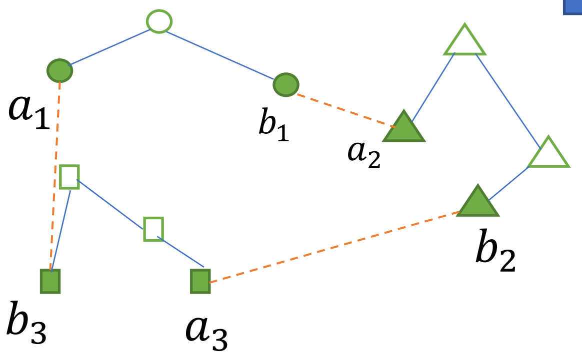
$$w(T_M) \leq \frac{8}{3}\mathrm{OPT} \approx 2.67\ \mathrm{OPT}$$

近似率(Guttmann-Beck et al.):
2.75

W：クラスタ内パスの合計長さ(OPT)

D：各クラスタで2点間距離が最大のものの合計

Step 1



$$w(T_h) \leq \frac{3}{2}\mathrm{OPT} + \frac{1}{2}W + 2D$$

[Guttmann-Beck et al. ’00]

Step 2

・$D \geq \frac{W}{2}$ のとき

$$w(T_l^1) \leq \frac{3}{2}\mathrm{OPT} + 2W - 2D$$

・$D < \frac{W}{2}$ のとき

$$w(T_l^2) \leq \frac{3}{2}\mathrm{OPT} + \frac{3}{2}W - D$$

Step 3

・$D \leq \frac{W}{3}$ のとき

$$w(T_h) \leq \frac{3}{2}\mathrm{OPT} + \frac{1}{2}W + 2D \leq \boxed{\frac{8}{3}\mathrm{OPT}}$$

・$D > \frac{W}{3}$ のとき

$$w(T_l^2) \leq \frac{3}{2}\mathrm{OPT} + \frac{3}{2}W - D \leq \boxed{\frac{8}{3}\mathrm{OPT}}$$

4.まとめ

・まとめ と 今後の課題

4.【まとめ】まとめ と 今後の課題

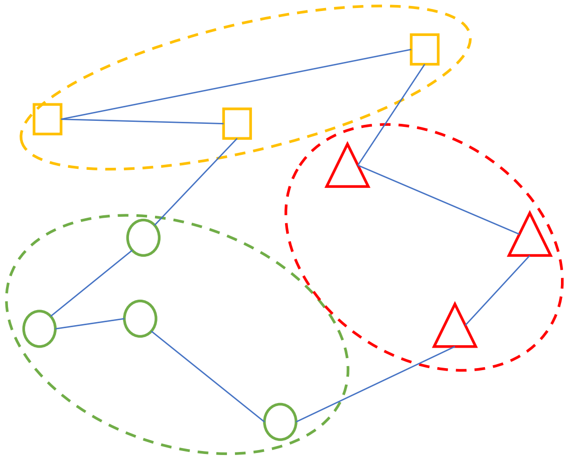
●まとめ

問題分類 【CTSP】	近似率 [Guttmann-Beck et al. ’00]	近似率 [本研究]
(1)始点と終点が与えられる.	1.9091 Zenklusen ’19	1.875
(2)二つの頂点が与えられる. どちらかを始点，終点に選択.	1.8 Zenklusen ’19	1.714
(3)始点のみが与えられる. 終点は自由に選択可能.	2.643	変化なし(2.643)
(4)何も与えられない. 始点と終点を自由に選択可能.	2.75 Zenklusen ’19	2.67

●今後の課題

このアルゴリズムを他の問題に適用し，
その問題に対する近似率を改善できないか？

Ex) SGPP(the subgroup planning problem)



END of Slides

Appendix

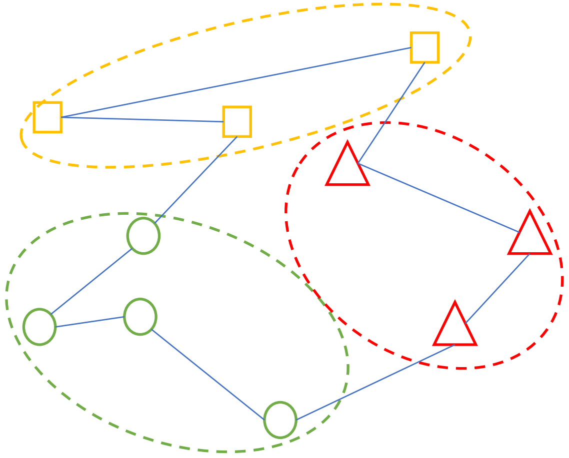
【Appendix】［定義］SGPP

◆完全無向グラフ $G = (V, E)$

●CTSP(The Clustered Traveling Salesman Problem)

定義

クラスタに分割されている頂点集合に対し，クラスタ内の頂点を連続して通過する最短のハミルトン閉路を求める問題.
すべての枝で三角不等式を満たす. ［NP困難］

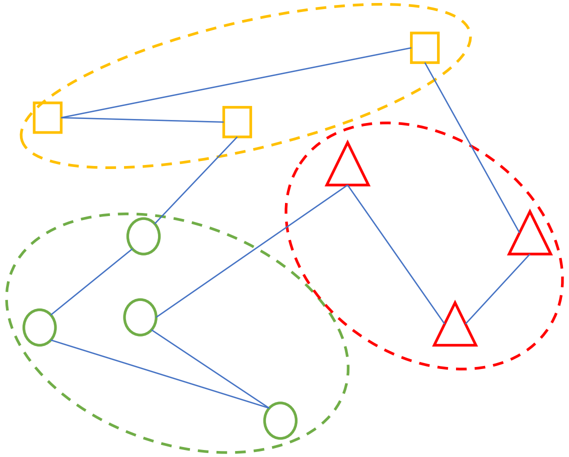


一般化

● SGPP(The Subgroup Planning Problem)

定義

クラスタに分割されている頂点集合に対し，クラスタ内の頂点を連続して通過する最短のハミルトン閉路を求める問題.
クラスタ間の枝で三角不等式を満たす. ［NP困難］



【Appendix】分類(4)についての少し詳細な証明

Step 1：TSPPについてのアルゴリズムより

$$\min\left\{2W-D,\frac{3}{2}W\right\}$$

Step 2：RPPについてのアルゴリズムにおいて
ここでは $\frac{3}{2}(A+D)$ を用いる.

$$\frac{3}{2}(A+D)\leq\frac{3}{2}\mathrm{OPT}$$

Step 3：Step 1とStep 2 を結合し特殊無向枝を削除する.

$$w(T_l)\leq\begin{cases}\frac{3}{2}\mathrm{OPT}-\mathrm{D}+(2W-D) & (D\geq\frac{W}{2})\\ \frac{3}{2}\mathrm{OPT}-D+\frac{3}{2}W & (D<\frac{W}{2})\end{cases}$$

【Appendix】分類(1)について係数の導出

*Step*1.

$$w(P) \le \min\{2W - U, \frac{3}{2}W\}$$

$$\le (1-x)\cdot(2W-U) + x\cdot\frac{3}{2}W$$

$$= \left(2 - \frac{1}{2}x\right)W + (-1+x)U$$

*Step*2.

$$w(T_s) \le \min\{\frac{3}{2}A + 2U, 3A + U\}$$

$$\le (1-y)\cdot\left(\frac{3}{2}A + 2U\right) + y\cdot(3A+U)$$

$$= \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}y\right)A + (2-y)U$$

*Step*3.

$$w(T_M) \le \mathrm{w}(P) - U + w(T_s)$$

$$= \left(2 - \frac{1}{2}x\right)W + \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}y\right)A + (x-y)U$$

以下の連立方程式を解き，係数を求める

$$\begin{cases} 2 - \frac{1}{2}x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}y \\ x - y = 0 \end{cases}$$

(LとAの係数を一致させる)

(Uの項を削除)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

求めたxとyを$Step3$に代入すると$\frac{15}{8} - approximation$を得る

【Appendix】分類(2)について係数の導出

$Step1.$

$$w(P) \leq \min\{2W-U, \frac{3}{2}W\}$$

$$\leq (1-x)\cdot(2W-U) + x\cdot\frac{3}{2}W$$

$$= \left(2-\frac{1}{2}x\right)W + (-1+x)U$$

$Step2.$

$$w(T_r) \leq \min\{\frac{3}{2}(A+U), 3A+U\}$$

$$\leq y\cdot\left(\frac{3}{2}(A+U)\right) + (1-y)\cdot(3A+U)$$

$$= \left(3-\frac{3}{2}y\right)A + \left(1+\frac{1}{2}y\right)U$$

$Step3.$

$$w(T_M) \leq \mathrm{w}(P) - U + w(T_r)$$

$$= \left(2-\frac{1}{2}x\right)W + \left(3-\frac{3}{2}y\right)A + \left(x+\frac{1}{2}y-1\right)U$$

以下の連立方程式を解き，係数を求める

$$\begin{cases} 2-\frac{1}{2}x = 3-\frac{3}{2}y & \text{（}L\text{と}A\text{の係数を一致させる）} \\ x+\frac{1}{2}y-1=0 & \text{（}U\text{の項を削除）} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{7} \\ y = \frac{6}{7} \end{cases}$$

求めたxとyを$Step3$に代入すると

$\frac{12}{7} - approximation$を得る

【Appendix 】分類(3)についての近似アルゴリズム

Algorithm 3［Guttmann-Beck et al. ’00］